

## Grado di un monomio Monomi simili

Oggi in classe c'è una gara di matematica. Vince lo studente che per primo riesce a ridurre l'espressione che l'insegnante ha scritto alla lavagna:



$$-3a^3b^2a5a^2b$$

L'espressione letterale  $-3a^3b^2a5a^2b$  è un monomio in cui figurano più fattori numerici e più volte una stessa lettera. In casi come questi, il monomio si riduce a **forma normale**, cioè con un solo fattore numerico e con le lettere tutte diverse tra loro.

Vediamo come si procede.

$$\begin{aligned} & -3a^3b^2a5a^2b = \\ & = -3(2)(5)(a^3a^1a^2)(b^2b) = \quad \text{applico la proprietà commutativa della moltiplicazione} \\ & = -30a^{3+1+2}b^{2+1} = \quad \text{applico la proprietà associativa e la regola del prodotto di potenze con la stessa base} \\ & = -30a^6b^3 \quad \text{ottengo il monomio ridotto a forma normale} \end{aligned}$$

Se consideriamo un qualsiasi monomio ridotto a forma normale, per esempio  $4a^2b^3c$ , diremo che il **grado rispetto alla lettera a** è 2 perché questo è il suo esponente, il grado rispetto alla lettera b è 3, il grado rispetto alla lettera c è 1 (sottinteso).

Il **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) del monomio  $4a^2b^3c$  è uguale alla somma degli esponenti delle lettere a, b e c, ossia  $2 + 3 + 1 = 6$ . Si dice che il monomio  $4a^2b^3c$  è di grado 6 oppure di sesto ( $6^\circ$ ) grado.

$$2 + 3 + 1 = 6 \leftarrow \text{grado}$$

$$4a^2b^3c$$

Se in un monomio non compare una lettera, il grado rispetto a quella lettera è 0. Per esempio, nel monomio  $3ab$  il grado rispetto alla lettera c è zero perché  $c^0 = 1$ .

### Definizioni

Il **grado di un monomio rispetto a una lettera** è l'esponente della lettera stessa.

Il **grado complessivo** o grado di un monomio è la somma degli esponenti di tutte le sue lettere.

due monomi si dicono:	esempio
• simili quando hanno la stessa parte letterale, cioè le stesse lettere con gli stessi esponenti	$+7ab^3$ e $-2ab^3$
• uguali quando sono simili e hanno lo stesso coefficiente	$-8a^2b$ e $-8a^2b$
• opposti quando sono simili e hanno i coefficienti opposti	$+3ab$ e $-3ab$

1 Quali dei seguenti monomi sono scritti in forma normale? Sottolineali.

$$2a^3b^3 \quad -aabb^2 \quad 6ab^4a^2b \quad -4xyz^4$$

2 Completa.

Per ridurre a forma normale il monomio  $-3a^2b^32ab^44ab^3$  applico:

- a. la proprietà commutativa della moltiplicazione  $-3 \cdot$  .....  
 b. la proprietà associativa e la regola delle potenze .....  
 Il monomio dato, scritto in forma normale, è .....

3 Riduci a forma normale i seguenti monomi, indicando di volta in volta le proprietà che hai applicato.

$$\begin{aligned} & -5abc3a^3b^2c^2 \quad \text{.....} \\ & -4xy2x^2y^63x^2 \quad \text{.....} \\ & 2ab^2cx^2y^46a^2bc^3x \quad \text{.....} \end{aligned}$$

4 Completa.

- a. Il grado di un monomio rispetto a una lettera è l'..... di quella lettera.  
 b. Nel monomio  $-6a^2x^5$  il grado rispetto alla lettera a è ....., rispetto alla lettera x è .....  
 c. Il grado complessivo o grado di un monomio è la ..... degli esponenti delle .....  
 d. Il grado del monomio  $5a^3b^4c$  è ..... perché .....

5 Spiega perché il monomio  $-8xy^2z^2$  è di ottavo grado.

6 Completa la tabella esprimendo il grado di ciascun monomio rispetto alle lettere che vi compaiono e il grado complessivo, come nell'esempio.

monomio	grado rispetto a x	grado rispetto a y	grado rispetto a z	grado complessivo
$-8x^3y$	$3^\circ$	$1^\circ$	0	$4^\circ$
$6x^3y^2z$				
$-3x^2y^3z^3$				
$9y^5z^2$				

7 Scrivi un monomio di quarto grado utilizzando le lettere a e b.

8 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- I monomi  $2ax^3$  e  $-7ax^3$  sono simili.  
 I monomi  $-ab^2$  e  $-a b^2$  sono opposti.  
 I monomi  $5x^2$  e  $-3x^2$  sono opposti.

V	F
V	F
V	F

9 Riconosci i monomi simili, uguali o opposti e inseriscili nella tabella.

$$ab^3 \quad -3a^4 \quad 2a^4b \quad -3a^2b^3 \quad -ab \quad 5ab^3 \quad ab \quad -11a^2b^3 \quad 2a^4b \quad 3a^4$$

monomi simili	monomi uguali	monomi opposti

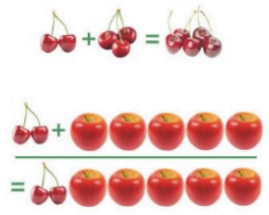
10 Scrivi tre monomi simili al monomio  $-8a^3b^4c^2$ .

11 Scrivi l'opposto di ciascuno dei seguenti monomi.

$$-2ab^4 \quad +7a^2b^3 \quad 5x^3y^2 \quad -2ab^4$$

## Addizione algebrica di monomi

La sorella maggiore di Marta ha spiegato a Marta l'addizione fra monomi usando una metafora un po' enigmatica: "2 ciliegie più 3 ciliegie è uguale a 5 ciliegie, ma 2 ciliegie più 5 mele restano sempre 2 ciliegie più 5 mele". Che cosa voleva dire?



Nell'addizione algebrica di due o più monomi si distinguono due casi.

### I monomi sono simili

**Esempio**  $5ab + (-9ab) + (+2ab) =$   
 $= 5ab - 9ab + 2ab =$  trascrivo i termini uno dopo l'altro con il proprio segno  
 $= (5 - 9 + 2)ab =$  raggruppo i coefficienti tra parentesi e fuori di essa il fattore comune  $ab$   
 $= -2ab$  eseguo la somma algebrica dei coefficienti e trascrivo il fattore  $ab$

Osserva: quest'operazione che si chiama **raccoglimento a fattore comune**, utilizza la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

### I monomi non sono simili

In questo caso l'addizione algebrica rimane solo indicata.

**Esempio**  $4ab + (-7a) = 4ab - 7a$

Analogamente a quanto avviene per i numeri relativi, la **differenza** tra due monomi simili si ottiene aggiungendo al primo l'opposto del secondo. Poiché la sottrazione di due monomi si riconduce a un'addizione, le due operazioni costituiscono un'unica operazione, che si chiama **addizione algebrica**, e il risultato è detto **somma algebrica**.

**Esempio**  $5a^2b - (-2a^2b) =$   
 $= 5a^2b + (+2a^2b) =$  aggiungo al primo monomio l'opposto del secondo  
 $= 5a^2b + 2a^2b =$   
 $= (5 + 2)a^2b =$   
 $= 7a^2b$  (somma algebrica)

È opportuno contrassegnare i monomi simili con uno stesso simbolo, al fine di controllare se sono stati considerati tutti.



Quando in un'addizione algebrica compaiono gruppi di monomi simili, si procede alla **riduzione dei termini simili**, che consiste nel sostituire a essi la loro somma algebrica.

**Esempio**  $-3ab + 6a - 5ab - 2a + a = (-3 - 5)ab + (+6 - 2 + 1)a = -8ab + 5a$   
 si scrive sempre il segno +

Se in un'addizione algebrica compaiono due monomi opposti, si usa eliminarli con delle barrette perché la loro somma è uguale a zero. Per esempio,  $-5a + 5a = 0$ .

### Regola

La **somma algebrica di due o più monomi simili** è un monomio simile a quelli dati che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

**Semplificare** un'espressione significa ridurla nella forma più semplice possibile.

- Se due monomi sono simili, si sommano i ..... e si scrive la stessa ..... Fai un esempio.  
 Se due monomi non sono simili, la loro somma rimane solo ..... Fai un esempio.

- Calcola la somma dei seguenti monomi simili.  
 $(+5x^2y) + (-9x^2y) =$   
 $(-4ab) + (-7ab) + (+ab) =$   
 $(-6ab^2) + (+2ab^2) + (-3ab^2) =$   
 $(+9x^3y^2) + (+x^3y^2) + (-4x^3y^2) =$

- Trasforma le seguenti sottrazioni di monomi simili in altrettante addizioni e calcola il risultato.  
  - $(+4a^2b) - (-2a^2b) =$
  - $(-5a^3x) - (-a^3x) =$
  - $(13a^4b^3) - (+7a^4b^3) =$
  - $(-8xy^2) - (-3xy^2) =$

- Esegui le addizioni algebriche dei monomi simili in tabella, come nell'esempio. Segui il verso della freccia.

addizione algebrica	$-8ab + 5ab + ab$	$6a^2b^3 - 3a^2b^3 - 5a^2b^3$	$-xy^4 + 9xy^4 - 2xy^4$	$11x^3y - 5x^3y + 3x^3y$
raccoglimento a fattore comune	$(-8 + 5 + 1)ab$			
somma algebrica	$-2ab$			

- Calcola le seguenti somme algebriche riducendo i termini simili.

- $-4ax - 7a - 9ax + 12a =$
- $3ab - 5b - 6ab + a + 5b + a =$
- $6ab^3 - 4ab^2 + 3ab^3 - ab^3 - 8ab^2 =$
- $-2xy + 4x - xy + 7x + 9xy + 11x =$

Ricorda di contrassegnare i monomi simili con uno stesso simbolo o colore.



### IL PROBLEMA DI OGGI L'algebra dell'astuccio dei colori

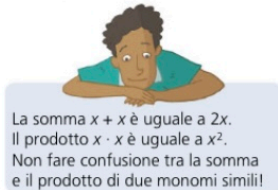
Lisa all'astuccio dei colori aggiunge o sottrae: +3 penne + 8 penne - 2 penne + 7 matite - 5 matite. Indica le penne con  $p$  e le matite con  $m$ , e calcola quante penne e matite sono rimaste.





# Moltiplicazione e potenza di monomi

Silvio sta facendo i compiti a casa ma fa ancora confusione fra somma e prodotto di monomi simili: il prodotto  $x \cdot x$  è uguale a  $2x$  o a  $x^2$ ?



La moltiplicazione di due monomi, per esempio di  $-6ab^3$  e  $+2a^2bc$  si indica con una delle seguenti scritte:

$(-6ab^3) \cdot (+2a^2bc)$  oppure  $-6ab^3 (+2a^2bc)$

Osserva attentamente i passaggi per calcolare il prodotto dei monomi dati.

$$\begin{aligned} & -6ab^3 \cdot (+2a^2bc) = \\ & = -6 \cdot (+2) \cdot (aa^2) \cdot (b^3b) \cdot c = \text{applico la proprietà commutativa della moltiplicazione} \\ & = -12a^{1+2}b^{3+1}c = \text{applico la proprietà associativa e il prodotto di potenze con la stessa base} \\ & = -12a^3b^4c \text{ ottengo il prodotto che è ancora un monomio} \end{aligned}$$

**Regola**

Il prodotto di due o più monomi è il monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

**Esempi**

a.  $5a^3b^2 \cdot (-6ab^5) = -30a^{3+1}b^{2+5} = -30a^4b^7$

b.  $-\frac{1}{A}x^2y^4 \cdot (+\frac{1}{2}x^2y) = -\frac{1}{2}x^4y^5$

Nella moltiplicazione si semplificano le frazioni, se ciò è possibile.



Analogamente a quanto avviene per i numeri naturali e relativi, la potenza di un monomio si ottiene moltiplicando il monomio per se stesso tante volte quante ne indica l'esponente.

**Esempio**  $(-3a^2b^3)^2 = (-3a^2b^3) \cdot (-3a^2b^3) = +9a^4b^6$

Ma possiamo giungere più rapidamente allo stesso risultato ricordando che la potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori, cioè:

$(-3a^2b^3)^2 = (-3)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b^3)^2 = +9a^{2 \cdot 2}b^{3 \cdot 2} = +9a^4b^6$

**Regola**

La potenza di un monomio è il monomio che si ottiene elevando a quella potenza sia il coefficiente sia la parte letterale del monomio dato.

**Esempi**

a.  $(-4a^2b^3)^2 = 16a^4b^6$        $(-2a^2bc^3)^4 = 16a^8b^4c^{12}$

b.  $(-2x^2y^4)^3 = -8x^6y^{12}$        $(+\frac{1}{3}ab^2)^2 = \frac{1}{9}a^2b^4$

**Fai attenzione** alle scritte  $(-ab)^2$  e  $-(ab)^2$  perché assumono un diverso significato:

$(-ab)^2$  significa  $(-ab) \cdot (-ab) = +a^2b^2$ , mentre  $-(ab)^2$  vuol dire  $-(ab) \cdot (ab) = -a^2b^2$ .

1 Scrivi in simboli la moltiplicazione dei monomi  $(-5ab^2)$  e  $(+2a^3)$ .

2 Completa le seguenti frasi in modo che descrivano come si calcola il prodotto dei monomi  $2x^4y^2$  e  $-7xy^4$ .

Si moltiplicano tra loro i coefficienti, cioè  $2 \cdot (\dots)$ .

Si moltiplicano tra loro le  $\dots$ .

Si scrive ogni lettera una sola  $\dots$  con l'esponente uguale alla  $\dots$  degli esponenti.

Quindi:  $2x^4y^2(-7xy^4) = \dots$

3 Esegui le moltiplicazioni date, scrivendo di volta in volta i passaggi per ottenere il risultato.

Nella bandierina gialla troverai i prodotti, in ordine sparso.

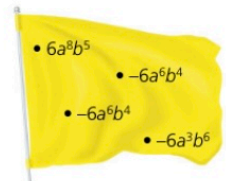
**ESERCIZIO GUIDATO**

$-3a^2b^3(+2a^4b) = (-3)(+2)a^{2+4}b^{\dots} = -\dots$

a.  $a^2b^4(-6ab^2) = \dots$

b.  $-2a^3b^5(-3a^5) = \dots$

c.  $-a^3b^2(+6a^3b^2) = \dots$



4 Associa con una freccia ciascuna moltiplicazione al corrispondente prodotto.

$-6xy^2(+4x^2y)$
$-2x^3(-12xy)$
$8x^4y(-3xy^2)$
$12xy^5(+2xy)$

$24x^2y^6$
$-24x^5y^3$
$-24x^3y^3$
$24x^4y$

Ricorda che nel calcolare il prodotto di due potenze con uguale base gli esponenti si sommano:  
 $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8$



5 Calcola le seguenti potenze, passo dopo passo, seguendo l'esempio.

monomio	potenza del coefficiente	potenza della parte letterale	potenza
$(-2a^3b^2)^5$	$(-2)^5 = -32$	$(a^3)^5(b^2)^5 = a^{3 \cdot 5}b^{2 \cdot 5} = a^{15}b^{10}$	$-32a^{15}b^{10}$
$(3a^4b)^4$			
$(-5a^2b^3)^3$			
$(+6x^2y^4)^2$			

6 Completa i passaggi per il calcolo delle seguenti potenze.

a.  $(-3a^2b^3)^3 = (-3)^3 (a^2)^{\dots} (\dots)^3 = \dots$

b.  $(-5a^3b^4)^2 = (\dots)^2 (\dots)^2 (\dots)^4 = \dots$

c.  $(+2a^2b^2c^3)^4 = (+\dots)^4 (a^{\dots})^4 (\dots)^2 (\dots)^{\dots} = \dots$

Ricorda che nel calcolare la potenza di una potenza gli esponenti si moltiplicano:  
 $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ .



7 **IL PROBLEMA DI OGGI** Allenamento per il compito in classe

Per esercitarsi al compito in classe, Giulio e Matteo inventano un gioco. Scrivono su dei fogliettini alcuni monomi di diverso grado, poi dividono il mucchio e ne mettono una metà in un sacchetto blu e l'altra in un sacchetto rosso. A turno, ognuno pesca un monomio da ogni sacchetto e li moltiplica fra loro. Fai lo stesso anche tu trascrivendo i seguenti monomi:

$3ab^4; -2bc; 9a^2bc^3; 12a^2b; -\frac{12}{5}ab^5c^2; 7a; 9b^3; -3ac; -12a^3b^{10}; 8c^5; \frac{1}{3}a^3c; -7a^6b^3$ .



**3.6**

Videolezione

**CAPISCO...**

**... E LO SO FARE!**

Esercizi interattivi

## Divisione di monomi

L'insegnante chiama alla lavagna Claudia. La domanda è: "Come si calcola il quoziente dei monomi  $6a^3b^5c$  e  $-2a^2b^3c$ ?". Poi aggiunge un indizio: "Prova a pensare alle proprietà della divisione di potenze con uguale base".

La divisione di due monomi, per esempio di  $6a^3b^5c$  e  $-2a^2b^3c$ , si può indicare in uno dei seguenti modi:

$$\frac{6a^3b^5c}{-2a^2b^3c} \text{ oppure } 6a^3b^5c : (-2a^2b^3c)$$

↑ dividendo     ↑ divisore

Osserviamo subito che nel primo monomio compaiono tutti i fattori letterali del secondo, con esponenti maggiori o uguali. Quando si verifica questa situazione si dice che il dividendo è **divisibile** per il divisore. Noi tratteremo solo casi come questo.

Vediamo insieme come si calcola il quoziente dei monomi dati:

$$\begin{aligned} 6a^3b^5c : (-2a^2b^3c) &= \\ = (6) : (-2) (a^3 : a^2) (b^5 : b^3) (c : c) &\quad \text{divido tra loro i coefficienti e ogni lettera} \\ = -3a^{3-2}b^{5-3}c^{1-1} &\quad \text{applico la proprietà della divisione di potenze con uguale base} \\ = -3ab^2 &\quad \text{ottengo il quoziente} \end{aligned}$$

Ripetiamo la divisione precedente utilizzando il secondo modello, ossia:

$$\frac{6a^3b^5c}{-2a^2b^3c} = -\frac{6}{2} a^{3-2} b^{5-3} c^{1-1} = -3ab^2$$

La lettera c non si scrive perché  $c^{1-1} = c^0 = 1$ .



### Regola

Il **quoziente di due monomi** di cui il primo è divisibile per il secondo è il monomio che ha per coefficiente il quoziente dei coefficienti e per parte letterale ogni lettera del dividendo con esponente uguale alla differenza degli esponenti con cui compare nel dividendo e nel divisore.

**Esempi** a.  $(-7a^5b^6) : (-4a^2b^4) = +\frac{7}{4}a^{5-2}b^{6-4} = \frac{7}{4}a^3b^2$

b.  $\left(-\frac{3}{2}x^7y^3z\right) : \left(+\frac{5}{4}x^4y\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \left(+\frac{4}{5}\right) x^{7-4}y^{3-1}z = -\frac{6}{5}x^3y^2z$

Casi particolari	Esempio
Se due monomi sono <b>simili</b> , il loro quoziente è un numero relativo	$(+4a^2b^3) : (-2a^2b^3) = -2$
Se due monomi sono <b>uguali</b> , il loro quoziente è +1	$(-5ab^2) : (-5ab^2) = +1$
Se due monomi sono <b>opposti</b> , il loro quoziente è -1	$(+7ab) : (-7ab) = -1$



**1** Dati i monomi  $8a^4b^3$  e  $-4a^2b$ , scrivi l'operazione di divisione nelle due forme diverse. Indica il dividendo e il divisore.

**2** Quali dei seguenti monomi sono divisibili per  $3a^2b^3$ ? Colora le caselle che ritieni giuste e motiva le risposte.

$-6a^2b^3$

$12a^4b^3$

$-4ab^2$

$-15a^2b^6$

$5a^3b^2$

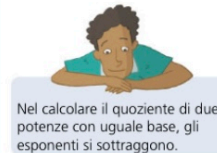
$-9a^2b^2$

### 3 L'INSEGNANTE CHIEDE

Il monomio  $4a^3b^5c$  è divisibile per  $2ab^2$ ?  
 Francesco dice di sì.  
 Maria dice di no perché nel secondo monomio non compare la lettera c.  
 Tu, come avresti risposto?

**4** Completa la tabella osservando che il monomio dividendo è sempre divisibile per il monomio divisore.

monomio dividendo	monomio divisore	quoziente
$+15a^4b^5$	$-5a^2b^2$	$(+15) : (-5) (a^4 : a^2) (b^5 : b^2) = \dots$
$-27x^6y^2$	$-9x^2y$	
$+30xy^6$	$-6xy^2$	
$-18a^5b^3$	$+3a^3b^2$	
$-10x^3y^2$	$+2x^3y^2$	



**5** Esegui le seguenti divisioni e verifica il risultato con la prova. Ricorda che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.

$15a^4b^6 : (-3ab^2) = -5a^3b^4$      Prova:  $-5a^3b^4 \cdot (-3ab^2) = 15a^4b^6$

$-12a^2b^3 : (+6a^2b) = \dots$

$-21a^4b^6 : (-7a^2b^2) = \dots$

$30a^9b^6 : (+5a^6b^2) = \dots$

$27x^5y^2z : (-3x^3yz) = \dots$

### 6 IL PROBLEMA DI OGGI

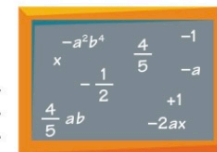
La sfida di Andrea  
 Associa a ciascuna divisione il corrispondente quoziente, scegliendolo tra quelli scritti alla lavagna dall'insegnante di Andrea. Fai attenzione!

$-10x^3y : (-10x^3y) = \dots$

$8a^3b^4 : (-8a^3b^4) = \dots$

$-12ab : (-15ab) = \dots$

$9ax : (-18ax) = \dots$





# I polinomi

**D** Dalila ha studiato greco e sa che *mono-* significa "uno solo" e *poli-* significa "molti". Se la parola *monomio* significa "un solo termine", allora che cosa può essere un polinomio?



Consideriamo la somma algebrica di due o più monomi non simili tra loro, per esempio:

$$2ab^2 - 3a^2b + 7a$$

Questa scrittura si dice **polinomio** e ciascun monomio si chiama **termine** del polinomio.

### Definizione

Il **polinomio** è la somma algebrica di due o più monomi non simili tra loro; i monomi che lo formano si chiamano **termini** del polinomio.

Se il polinomio ha due, tre, quattro termini, si chiama rispettivamente **binomio**, **trinomio**, **quadrinomio**.

<b>Esempi</b>	$a - 7ab^2$	$2a^2 - ab + c$	$3x^2 - y + 2xy - 1$
	binomio	trinomio	quadrinomio

Qui di seguito diamo alcune definizioni riguardanti i polinomi con i corrispondenti esempi.

### Definizione

Il **grado** di un polinomio **rispetto a una lettera** è il massimo esponente con cui quella lettera compare nel polinomio.

### Esempio

$a^5b^2 + 2a^2b^4 - 3a$  è un polinomio di grado 5 rispetto alla lettera  $a$  e di grado 4 rispetto alla lettera  $b$ .

Il **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) di un polinomio è il maggiore tra i gradi dei suoi termini.

$a^5b^2 + 2a^2b^4 - 3a$  è un polinomio di grado 7.

$\uparrow$       $\uparrow$       $\uparrow$   
 $5 + 2 = 7$     $2 + 4 = 6$     $1$

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

$a^2b^3 - 6ab^4 + 3a^5$  è un polinomio omogeneo perché ogni termine è di grado 5.

Un polinomio si dice **ordinato** secondo le potenze crescenti o decrescenti di una certa lettera se, letto da sinistra verso destra, gli esponenti di quella lettera crescono o decrescono.

$a^2 + 3a^3 - 9a^5$  è un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti della lettera  $a$ .  
 $a^4 - 6a^3 + 4a - 3$  è un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera  $a$ .  
 $ab^3 - 2a^2b^2 + a^3b$  è un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti della lettera  $a$  e decrescenti della lettera  $b$ .

Un polinomio si dice **completo** rispetto a una lettera se essa compare con tutte le potenze, da quella di grado più alto a quella di grado 0.

$x^3 - 8x^2 - x + 2$  è un polinomio completo rispetto alla lettera  $x$  perché ci sono tutte le potenze di  $x$  dal grado 3 al grado zero. Ricorda che  $2 = 2x^0$ . Il termine  $+2$  si chiama **termine noto**.

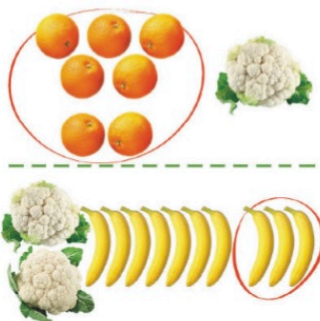
- 1 Come si chiama la scrittura  $a^3b - 4a$ ?
- 2 Quanti e quali sono i termini del polinomio  $-2ab^3 + a^2 - 5a^2b$ ?
- 3 Qual è il grado del polinomio  $2a^5b^2 - 3ab^3$  rispetto alla lettera  $a$ ?  
 2     5     4     3  
 E rispetto alla lettera  $b$ ?  
 2     4     5     3
- 4 Qual è il grado (complessivo) del polinomio  $-6a^3b^2 + 2a^2b - 4a^2b^4$ ?  
 4     5     6     3
- 5 Completa la tabella, seguendo l'esempio.

polinomio	grado rispetto alla lettera $x$	grado rispetto alla lettera $y$	grado complessivo
$3xy^6 + 5x^3y - y^2$	3°	6°	7°
$x^4y - 4x^2 + x^3y^2 - 3xy^5$			
$-2x^5y - x^6y^3 + 4xy^4$			
$5xy^4 + 2x^3y^5 - 3x^2y^5$			
$-3x^2y - 5x^3y + x^4y^2 + 2xy^4 + 1$			

- 6 Quali polinomi dei seguenti gruppi sono omogenei? Indicalo con una crocetta.
  - $2ab^4 - 3a^2b^3 + 6a^4b$
  - $-2x^6y^4 + 3x^3y^3 - 5x^5y^5$
  - $3a^2b^5 - 5a^3b^4 - 2abc^5$
  - $-4a^7b - 3a^4b^2 + 2a^3b^5 - c^9$
  - $7a^5b^4 - a^2b^7 + 4a^3b^6$
  - $-10a^6b^7 - a^{13}$
  - $a^4b^3c - 6a^8 + 5a^5b^2c + bc^7$
  - $-6x^5y + x^2y^4 - 2x^3y^3$
  - $-5ab^6 + 2b^4c^3 - 4a^2b^5$
- 7 Il seguente polinomio è ordinato rispetto alla lettera  $a$ ? In caso di risposta affermativa specifica l'ordine (crescente o decrescente).  
 $2a^3b - 4a^4b^3 + 6a^5b^2 - 3a^6$      SÌ     NO     crescente     decrescente
- 8 Quali dei seguenti polinomi sono completi rispetto alla lettera  $a$ ?  
  $-5a^2 + 2a^3 + 4 + a$       $2a^3 - 7a + 2$       $4ab - 2b^2 + 6a^2b$       $-6a^2 - 6a$
- 9 In ciascun polinomio evidenzia il termine noto. Qual è il grado di un termine noto?  
 $2ab^3 - 4a^3b^2 + 3$      $-6 + 2a - 5abc^2$      $3x^2y^4 - 2 + 8x^2y^3 + 2x^5$
- 10 **IL PROBLEMA DI OGGI** Ma quanti anni abbiamo?  
 Alberto ha 4 volte l'età di Tobia, il suo cagnolino. La mamma di Alberto, invece, ha 6 volte l'età di Tobia al quadrato, e il papà di Alberto ha il doppio dell'età del cagnolino elevata alla terza. Qual è la somma delle età di tutta la famiglia? Esprimilo con un polinomio. Si tratta di un polinomio completo?

## Addizione algebrica di polinomi

Gigi e Laura vivono insieme. Oggi hanno fatto entrambi la spesa: Gigi ha comprato 5 arance (a), 3 banane (b) e un cavolfiore (c); Laura ha comprato 9 banane e 2 cavolfiori, ma ha mangiato 2 arance. Come puoi esprimere il contributo totale dei due ragazzi?



La somma di due o più polinomi si indica scrivendo uno dopo l'altro i polinomi, ciascuno in parentesi, separati dal segno + dell'addizione. Per esempio, vogliamo addizionare i polinomi

$$5a + 3b + c \quad \text{e} \quad -2a + 9b + 2c$$

Scriviamo:

$$(5a + 3b + c) + (-2a + 9b + 2c)$$

↑  
segno dell'addizione

e calcoliamo la loro somma:

$$\begin{aligned} (5a + 3b + c) + (-2a + 9b + 2c) &= \\ &= 5a + 3b + c - 2a + 9b + 2c = \\ &= \underline{5a} + \underline{3b} + \underline{c} - \underline{2a} + \underline{9b} + \underline{2c} = \\ &= (5 - 2)a + (3 + 9)b + (1 + 2)c = \\ &\text{si scrive sempre il segno +} \\ &= 3a + 12b + 3c \end{aligned}$$

elimino le parentesi e il segno + dell'addizione  
riduco i termini simili che contrassegno con uno stesso simbolo  
raccolgo in parentesi i coefficienti dei termini simili e scrivo tra una parentesi e l'altra sempre il segno +  
 $3a + 12b + 3c$  è la somma dei polinomi dati

Per quanto riguarda la sottrazione di due polinomi, si scrivono tra parentesi e si interpone tra di esse il segno -. Ritorniamo allora ai polinomi dati ed eseguiamo la sottrazione

$$(5a + 3b + c) - (-2a + 9b + 2c)$$

$$(5a + 3b + c) - (-2a + 9b + 2c) =$$

$$= 5a + 3b + c + 2a - 9b - 2c =$$

$$= \underline{5a} + \underline{3b} + \underline{c} + \underline{2a} - \underline{9b} - \underline{2c} =$$

$$= (5 + 2)a + (3 - 9)b + (1 - 2)c =$$

$$= 7a - 6b - c$$

elimino le parentesi e cambio il segno a tutti i termini della seconda parentesi  
riduco i termini simili che contrassegno con uno stesso simbolo  
raccolgo in parentesi i coefficienti dei termini simili e scrivo tra una parentesi e l'altra sempre il segno +  
 $7a - 6b - c$  è la differenza dei polinomi dati

### Procedimenti

La **somma di due polinomi** si ottiene scrivendo uno di seguito all'altro i loro termini, ciascuno con il proprio segno, ed eseguendo la riduzione degli eventuali termini simili.

La **differenza di due polinomi** si ottiene scrivendo i termini del minuendo, ciascuno con il proprio segno, e di seguito a essi quelli del sottraendo con i segni cambiati, ed eseguendo la riduzione degli eventuali termini simili.

Poiché la sottrazione si trasforma in addizione, le due operazioni costituiscono un'addizione algebrica e il risultato una **somma algebrica**.

## ... E LO SO FARE!

1 La scrittura  $(-3a + b) + (a - ab + 2b)$  rappresenta la ..... di due .....

2 La scrittura  $(a^2b + a) - (-4a + b)$  rappresenta la ..... di due .....

3 Mediante l'uso delle parentesi indica le addizioni dei seguenti gruppi di polinomi e calcolane la somma.

$$3a - 5b \quad \text{e} \quad -2a + 8b$$

Si scrive:

$$\begin{aligned} (3a - 5b) + (-2a + 8b) &= \\ &= \underline{3a} - \underline{5b} - \underline{2a} + \underline{8b} = \\ &= a + 3b \end{aligned}$$

a.  $-5ab + 4a$  e  $-7b - 3ab + 9a$

c.  $-6ab - 2b^2 + 4a^2$  e  $-2ab + b^2 - 6a^2$

b.  $6a - 4b + 5c$  e  $+8a - 7b + 2c$

d.  $\frac{1}{3}a - \frac{3}{4}b + c$  e  $-\frac{1}{3}c + \frac{3}{2}b - \frac{1}{3}a$

4 Mediante l'uso delle parentesi indica le sottrazioni tra i polinomi dei seguenti gruppi e calcolane la differenza.

$$-2a + 3b \quad \text{e} \quad 7a - 4b$$

Si scrive:

$$\begin{aligned} (-2a + 3b) - (7a - 4b) &= \\ &= \underline{-2a} + \underline{3b} - \underline{7a} + \underline{4b} = \\ &= -9a + 7b \end{aligned}$$

a.  $-4a + 5b + 9a^2b$  e  $-8a - 3b + 6a^2b$

c.  $-8x + 11y + xy$  e  $5x - 7xy + 4z$

b.  $6a + 3b - c$  e  $9a + 4b - 3c$

d.  $\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}bc + 2$  e  $1 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{3}{4}bc$

5 Esegui le addizioni algebriche e riduci i termini simili.

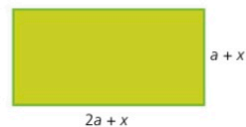
a.  $(8x - 3y + 5z) + (3z + 4y + 5x) - (6x - 7y + z) =$   
= ..... =

b.  $(2a^2 - 5a^2b - 7ab^2) - (-3ab^2 + 4a^2 - 8a^2b) + (5a^2 - 3a^2b) =$   
= ..... =

6 **IL PROBLEMA DI OGGI** L'agricoltore matematico

Un contadino possiede un orto rettangolare le cui dimensioni sono lunghe  $2a + x$  e  $a + x$ . Scrivi l'espressione per calcolare il perimetro. Per recintarlo, quanti metri di rete metallica dovrà acquistare quel contadino se  $a = 75$  m e  $x = 32$  m?

[578 m]



Evidenzia i termini simili usando uno stesso simbolo.



Elimina le parentesi tenendo conto del segno che le precede.



## Moltiplicazione di polinomi

La locandina di una rassegna cinematografica è divisa in riquadri: indicando i lati dei riquadri con  $a$ ,  $b$  e  $c$  come si calcola l'area del pannello? Moltiplicando i lati:  $2a(3b + c)$ ? Oppure sommando le aree degli otto riquadri:  $6ab + 2ac$ ?



### Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

L'area della locandina può essere ottenuta con entrambi i metodi: è la stessa cosa!

Vediamo perché, eseguendo la moltiplicazione  $2a \cdot (3b + c)$ . In base alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione algebrica abbiamo:

$$\begin{aligned} 2a \cdot (3b + c) &= \\ &= 2a \cdot (3b) + 2a \cdot (c) = \end{aligned}$$

moltiplico il monomio per ciascun termine del polinomio  
ottengo un polinomio che è la somma algebrica dei precedenti prodotti

### Regola

Il prodotto di un monomio per un polinomio è il polinomio che si ottiene moltiplicando il monomio per ciascun termine del polinomio.

La moltiplicazione di un polinomio per un monomio si esegue in modo analogo, cioè si moltiplica ciascun termine del polinomio per il monomio.

**Esempio**

$$\begin{aligned} (2x^3 - 6xy - 3y^2) \cdot (-2x^2y) &= \\ &= 2x^3 \cdot (-2x^2y) - 6xy \cdot (-2x^2y) - 3y^2 \cdot (-2x^2y) = \\ &= -4x^5y + 12x^3y^2 + 6x^2y^3 \end{aligned}$$

### Moltiplicazione di due polinomi

Per eseguire la moltiplicazione di due polinomi, per esempio:

$$(2x - 3y) \cdot (4x^2 + 2y^3)$$

si applica due volte la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione algebrica:

$$\begin{aligned} (2x - 3y) \cdot (4x^2 + 2y^3) &= \\ &= 2x \cdot (4x^2 + 2y^3) - 3y \cdot (4x^2 + 2y^3) = \\ &= 8x^3 + 4xy^3 - 12x^2y - 6y^4 \end{aligned}$$

### Regola

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo.

Vediamo un esempio in cui i polinomi da moltiplicare sono tre.

$$\begin{aligned} (-4a + 5b) \cdot (2a + 3b) \cdot (a - 2b) &= \\ &= (-8a^2 - 12ab + 10ab + 15b^2) \cdot (a - 2b) = \\ &= (-8a^2 - 2ab + 15b^2) \cdot (a - 2b) = \\ &= -8a^3 + 16a^2b - 2a^2b + 4ab^2 + 15ab^2 - 30b^3 = \\ &= -8a^3 + 14a^2b + 19ab^2 - 30b^3 \end{aligned}$$

1 La scrittura  $-5a \cdot (a^2 + 7b)$  rappresenta la moltiplicazione di un ..... per un .....

2 Quale proprietà della moltiplicazione si applica per calcolare il prodotto di un monomio per un polinomio?

- associativa     distributiva     commutativa

3 **ESERCIZIO GUIDATO** Esegui le seguenti moltiplicazioni.

a.  $-3a \cdot (2a^2 - 4ab) = -3a \cdot (\dots) - 3a \cdot (\dots) = \dots$

b.  $6a^3b \cdot (-2ab + a^2b) = 6a^3b \cdot (\dots) + 6a^3b \cdot (\dots) = \dots$

c.  $\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(6x - \frac{4}{5}xy + 1\right) = \frac{1}{2}x^2 \cdot (\dots) + \frac{1}{2}x^2 \cdot (\dots) + \frac{1}{2}x^2 \cdot (\dots) = \dots$

4 **Completa.**

Per moltiplicare due polinomi si applica due volte la proprietà ..... della moltiplicazione rispetto all'.....

5 **Completa** le moltiplicazioni date e riduci gli eventuali termini simili.

a.  $(-5a + b) \cdot (a - 2b) = -5a \cdot (a - \dots) + b \cdot (\dots - 2b) = \dots$

b.  $(3a^2 - 4b) \cdot (-a^2 + 3b) = 3a^2 \cdot (-a^2 + \dots) - 4b \cdot (\dots + \dots) = \dots$



Inserisci le frecce, se ti agevolano nello svolgimento dell'esercizio.

6 **Esegui** la seguente moltiplicazione di tre polinomi.

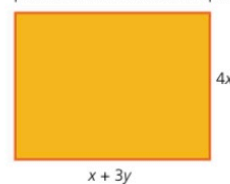
$$(a + 2b) \cdot (3a - 2b) \cdot (2a + 3b) = \dots$$

Se i polinomi da moltiplicare sono tre, si moltiplica il primo polinomio per il secondo, il risultato per il terzo e si riducono i termini simili.



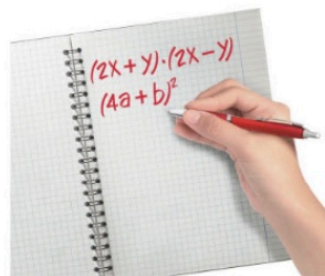
7 **IL PROBLEMA DI OGGI** Prodotti per il fai-da-te

Mario ha un pannello rettangolare di compensato con le dimensioni date in figura. Esprimi l'area come prodotto di un monomio per un polinomio e calcolane il valore per  $x = 2$  m e  $y = 5$  m. [136 m<sup>2</sup>]





## Divisione di un polinomio per un monomio



La divisione di un polinomio per un monomio è possibile solo se ogni termine del polinomio è divisibile per il monomio.

Per dividere un polinomio per un monomio si applica la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione algebrica e si aggiungono i quozienti parziali.

### Esempio

$$(18a^5 - 6a^3 + 9a^6) : (-3a^2) =$$

$$= 18a^5 : (-3a^2) + (-6a^3) : (-3a^2) + (+9a^6) : (-3a^2) =$$

si scrive sempre il segno +

$$= -6a^3 + 2a - 3a^4$$

divido ciascun termine del polinomio per il monomio, ricordando anche la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base  $a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$

scrivo il risultato della divisione che è ancora un polinomio

### Regola

Il quoziente di un polinomio per un monomio è un polinomio i cui termini si ottengono dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio.

### Esempi

a.  $(15x^3y^2 - 10x^4 - 20x^5) : (+5x^3) =$   
 $= (15x^3y^2) : (+5x^3) + (-10x^4) : (+5x^3) + (-20x^5) : (+5x^3) =$   
 $= 3y^2 - 2x - 4x^2$

b.  $(3a^2 - 7ab + 4a^2) : (-4a) =$   
 $= (3a^2) : (-4a) + (-7ab) : (-4a) + (+4a^2) : (-4a) =$  i coefficienti dei singoli quozienti si possono scrivere sotto forma di frazione  
 $= -\frac{3}{4}a + \frac{7}{4}b - a$

c.  $(\frac{5}{6}x^2y + 3xy^2) : (-5xy) =$   
 $= (\frac{5}{6}x^2y) : (-5xy) + (3xy^2) : (-5xy) =$   
 $= (\frac{5^1}{6}x^2y) : (-\frac{5^1}{5}xy) - \frac{3}{5}y =$   
 $= -\frac{1}{6}x - \frac{3}{5}y$

$$\frac{x^2y}{xy} = x \text{ perché } x^2y : xy = x^{2-1}y^{1-1} = x^1y^0 = x$$



1 La scrittura  $(-10a^7 + 6a^4 + 8a^3) : (-2a)$  rappresenta la divisione di un ..... per un .....

2 Quale proprietà della divisione si applica per calcolare il quoziente di un polinomio per un monomio?

- distributiva     commutativa     associativa

3 **Esercizio guidato** Esegui le seguenti divisioni.

a.  $(12a^4 + 15a^6) : (-3a) =$   
 $= 12a^4 : (-3a) + (.....) : (.....) =$   
 $= .....$

b.  $(-16x^5 + 6x^2 - 4x) : (+2x) =$   
 $= -16x^5 : (.....) + (.....) : (+2x) + (.....) : (.....) = .....$

4 Esegui le divisioni, completando la tabella. Esegui i calcoli sul tuo quaderno.

divisione	primo quoziente parziale	secondo quoziente parziale	risultato
$(15x^6 - 10x^2) : 5x$	$15x^6 : 5x = 3x^5$	$-10x^2 : 5x = -2x$	$3x^5 - 2x$
$(8ab^2 - 12a^2b^2) : (-4ab)$			
$(6x^5 - 9x^4) : 3x^3$			
$(16a^3 - 4a^2) : (-2a^2)$			
$(12a^4b^2 + 6a^5b^3) : (-6a^2b)$			
$(18a^3b^4 + 27a^7b^3) : (-9a^2b^2)$			
$(21a^6b^4 - 14a^4b^6) : 7a^3b^4$			
$(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^5y^2) : (-\frac{2}{3}x^2)$			

5 Calcola il quoziente di ciascuna divisione eseguendo mentalmente i calcoli intermedi.

a.  $(-5ab + 4a^2b^2 - 6a^3b^5) : (-2ab) = +\frac{5}{2} - 2ab + .....$

b.  $(3x + 6x^2y) : (+2x) = .....$

c.  $(7x^5 - 3x^3) : (-x^2) = .....$

d.  $(-20x^3y^3 + 30x^2y^4) : (-10x^2y^2) = .....$

e.  $(15a^3b^4 - 10a^4b^3 + 25a^5b^2) : (+5a^2b^2) = .....$

6 **IL PROBLEMA DI OGGI** La divisione in colonna

Carlo, per eseguire la divisione  $(4a^5b - 6a^4b^2 - 8a^3b^3) : (-2a^2b)$  applica il procedimento usato per dividere due numeri. Secondo te, è corretto? Ti piace?

$$\begin{array}{r} \text{dividendo} \quad \text{divisore} \\ 4a^5b - 6a^4b^2 - 8a^3b^3 \quad | \quad -2a^2b \\ \underline{-2a^3 + 3a^2b + 4ab^2} \phantom{00} \\ \text{quoziente} \end{array}$$

Esegui la seguente divisione utilizzando il procedimento di Carlo.

$$-18x^3y + 27x^2 - 36x^2y^2 : 9x^2$$









