

I POLINOMI

Si chiama **POLINOMIO** la somma algebrica di più monomi interi

Ad esempio sono polinomi:

$$3x^2+2x; \quad 4a^2b^2+b^3; \quad ab+xy;$$

$$8x^2+11x+4a^2b^2+4b^3$$

I POLINOMI

Ogni monomio che compone il polinomio si dice che è un suo **termine**.

Un POLINOMIO in cui non compaiono monomi simili si dice che è ridotto alla sua **FORMA NORMALE**

Ad esempio il polinomio

$$3x^2+2x+4 \quad a^2b^2+5x^2+9x+4 \quad b^3$$

Ridotto alla sua forma normale è:

$$8x^2+11x+4 \quad a^2b^2+4 \quad b^3$$

Un **POLINOMIO** ridotto in **FORMA NORMALE** si dice:

- **Nulllo** se tutti i suoi termini hanno coefficiente zero, ad esempio $0x^2+0ab+0$
- **Binomio** se ha due termini non nulli, ad esempio $3a+x^2$
- **Trinomio** se ha tre termini non nulli, ad esempio $2x-3y+1$
- **Quadriminomio** se ne ha quattro non nulli, ad esempio $6x^2+3ab-7c+10$

GRADO di un POLINOMIO

- Si chiama **GRADO COMPLESSIVO** di un polinomio il massimo fra i gradi dei monomi che lo compongono
- Si chiama **GRADO DI UN POLINOMIO RISPETTO AD UNA SUA LETTERA** il massimo grado con cui essa compare nel polinomio stesso
- Un polinomio si dice **OMOGENEO** se tutti i suoi termini, cioè i monomi che lo compongono sono dello stesso grado
- Il **TERMINE NOTO** di un polinomio, se esiste, è quello numerico, cioè quello che ha grado zero rispetto a tutte le lettere

GRADO di un POLINOMIO

Ad esempio:

- $2x^2y+3xy^6+10$
 - ha grado complessivo 7
 - ha grado 2 rispetto la x
 - ha grado 6 rispetto la y
 - ha termine noto pari a 10
 - non è un polinomio omogeneo
- $5a^2b+3ab^2+a^3$
 - ha grado complessivo 3
 - ha grado 3 rispetto la a
 - ha grado 2 rispetto la b
 - non ha termine noto
 - è un polinomio omogeneo perché i suoi monomi sono tutti di terzo grado

Un polinomio si dice **ORDINATO** secondo le potenze decrescenti (o crescenti) di una lettera, se, leggendolo da sinistra a destra, gli esponenti di quella lettera vanno diminuendo (o crescendo)

Ad esempio:

- $8a^5 + 11a^4x + 4ba^3 + 4b^3a^2 + abx + 5$

È un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti di **a**

- $2a^5x + 3a^2x^2 + 4a^2x^3 + 5x^4$

È un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti di **x**

Un polinomio si dice **COMPLETO** rispetto ad una lettera se essa compare con tutte le potenze da quella più grande a quella di grado zero

Ad esempio:

- $8a^5 + 11a^4x + 4ba^3 + 4b^3a^2 + abx + 5x$

È un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti di **a**

È anche completo rispetto ad **a** perché il termine di grado zero è **5x**

- $2a^5x + 3a^2x^2 + 4a^2x^3 + 5x^4$

È un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti di **x**

Non è completo rispetto **x** perché **manca il monomio con x^0**

OPERAZIONI COI POLINOMI:

**L'ADDIZIONE
E LA
SOTTRAZIONE**

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dati due polinomi P_1 e P_2 , si chiama **POLINOMIO SOMMA** di P_1 e P_2 , il polinomio che si ottiene scrivendo i loro termini uno di seguito all'altro e riducendo poi i termini simili.

Ad esempio:

$$P_1 = 3x^2 + 2ab + xy$$

$$P_2 = 2xy - 3x^2 - ab$$

$$P_1 + P_2 = (3x^2 + 2ab + xy) + (2xy - 3x^2 - ab) =$$

Togliamo le parentesi e sommiamo i monomi simili

$$= \color{red}{3x^2} + \underline{2ab} + \color{blue}{xy} + \color{blue}{2xy} - \color{red}{3x^2} - \underline{ab} =$$

$$= ab + 3xy$$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Si dice **OPPOSTO** di un polinomio P , e si indica con il simbolo $-P$, il polinomio ottenuto prendendo gli opposti di tutti i monomi che lo compongono.

La somma di due polinomi opposti è zero.

Ad esempio:

$$P = ab + xy \qquad -P = -(P) = -ab - xy = -(ab + xy)$$

$$\begin{aligned} P + (-P) &= (ab + xy) + (-ab - xy) = \\ &= \underline{ab} + \underline{xy} - \underline{ab} - \underline{xy} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dati due polinomi P_1 e P_2 , si chiama **POLINOMIO DIFFERENZA** di P_1 E P_2 , il polinomio che si ottiene sommando al primo l'opposto del secondo.

Ad esempio:

$$P_1 = 3x^2 + 2ab + xy$$

$$P_2 = 2xy - 3x^2 - ab$$

$$P_1 - P_2 = (3x^2 + 2ab + xy) - (2xy - 3x^2 - ab) =$$

Togliamo le parentesi e sommiamo i monomi simili, se davanti alla parentesi ho un meno devo cambiare il segno a tutti i termini dentro la parentesi.

$$= 3x^2 + \underline{2ab} + xy - 2xy + 3x^2 + \underline{ab} =$$

$$= 6x^2 + 3ab - xy$$

OPERAZIONI COI POLINOMI:

LA

MOLTIPLICAZIONE

MOLTIPLICAZIONE

PRODOTTO di un **POLINOMIO** per un **COEFFICIENTE NUMERICO**.

Si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, cioè moltiplico il coefficiente numerico per ogni termine del polinomio.

Ad esempio:

$$4(3x^2 + 2ab - xy) = 4 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2ab + 4 \cdot (-xy) =$$
$$= 12x^2 + 8ab - 4xy$$

$$-3(2xy - 3x^2 - ab) = -3 \cdot 2xy - 3 \cdot (-3x^2) - 3 \cdot (-ab) =$$
$$= -6xy + 9x^2 + 3ab$$

MOLTIPLICAZIONE

PRODOTTO di un **POLINOMIO** per un **MONOMIO**.

Si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, cioè moltiplico il monomio per ogni termine del polinomio.

Ad esempio:

$$\begin{aligned} & 4ab(3x^2 + 2ab - xy) = \\ & = 4ab \cdot 3x^2 + 4ab \cdot 2ab + 4ab \cdot (-xy) = \\ & = 12abx^2 + 8a^2b^2 - 4abxy \end{aligned}$$

MOLTIPLICAZIONE

PRODOTTO tra 2 POLINOMI

Si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione, cioè moltiplico ogni termine del primo polinomio per ogni termine del polinomio.

Ad esempio:

$$(4a^2b - b^3)(3x^2 + 2ab - xy) =$$

$$= 4a^2b \cdot 3x^2 + 4a^2b \cdot 2ab + 4a^2b \cdot (-xy) - b^3 \cdot 3x^2 - b^3 \cdot 2ab - b^3 \cdot (-xy) =$$

$$= 12a^2bx^2 + 8a^3b^2 - 4a^2bxy - 3b^3x^2 - 2ab^4 + b^3xy$$

Eseguito il prodotto, sommo, se presenti, i monomi simili

PRODOTTI

NOTEVOLI

PRODOTTI NOTEVOLI

I **PRODOTTI NOTEVOLI** sono prodotti di polinomi con certe caratteristiche che si incontrano frequentemente nel calcolo letterale. Per questa ragione è utile memorizzarne il risultato per evitare di ripetere inutilmente sempre gli stessi calcoli.

QUADRATO DI UN BINOMIO

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Il **QUADRATO** di un **BINOMIO** é un polinomio i cui termini sono costituiti dalla somma del quadrato del primo termine del binomio, con il doppio prodotto dei due termini del binomio, con il quadrato del secondo termine.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se i due monomi sono concordi il doppio prodotto è positivo.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Se i due monomi sono discordi il doppio prodotto è negativo.

QUADRATO DI UN POLINOMIO

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Il **QUADRATO** di un **POLINOMIO** é un polinomio formato dalla somma dei quadrati di tutti i termini del polinomio stesso con il doppio prodotto di ciascun termine per tutti quelli che lo seguono

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) = \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = \\ &= \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc} \end{aligned}$$

SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(-a + 2b)(-a - 2b) = a^2 - 4b^2$$

Il Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza si calcola nel seguente modo:

1. individuo i due monomi che sono uguali nei due binomi
2. Individuo i due monomi opposti nei due binomi
3. calcolo la differenza tra il quadrato del monomio ottenuto nel punto **1** e il quadrato monomio ottenuto nel punto **2**.

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 - b^2$$

$$(-a + 2b)(-a - 2b) = -a^2 - 2ab + 2ab + 4b^2 = 4b^2 - a^2$$

CUBO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Il **CUBO** di un **BINOMIO** é un polinomio formato dalla somma del cubo del primo termine del binomio, con il cubo del secondo termine, con il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, con il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo.

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)^2(a+b) = \\ &= a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2a^2b} + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)^2(a-b) = \\ &= a^3 - \underline{a^2b} - \underline{2a^2b} + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = \mathbf{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}. \end{aligned}$$

OPERAZIONI COI POLINOMI:

LA DIVISIONE

DIVISIONE

RAPPORTO di un **POLINOMIO** per un **NUMERO**.

Si applica la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione, cioè divido i coefficienti di ciascun termine del polinomio per il numero.

Ad esempio:

$$\begin{aligned} (6x^2 + 2ab - 8xy) : 2 &= 6x^2 : 2 + 2ab : 2 - 8xy : 2 = \\ &= 3x^2 + ab - 4xy \end{aligned}$$